

# 功能梯度材料稳态热传导方程的分层精细指数法\*

蓝林华, 富明慧, 高文乐

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 提出了功能梯度材料稳态热传导方程的分层精细指数化法 (Layered Exponential Precise Method, LPEM)。首先将稳态热传导方程单向离散, 转化为沿厚度解析的常微分边值问题。然后将厚度  $M$  等分, 利用相邻结点间状态参量的精细积分关系式, 将常微分边值问题转化为一个几乎无离散误差的代数方程组, 并给出合并消元的递推公式。对于热传导系数沿厚度指数或者分段指数规律变化的情况, 该方法具有极高的精度与效率; 对于更一般的情况, 提出了将热传导系数沿厚度分段指数化的求解方法。算例的结果证明了该文方法的有效性。

**关键词:** 功能梯度材料; 稳态热传导方程; 分层精细指数法; 两点边值问题; 递推消元

**中图分类号:** O302 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 04-0001-06

## Layered Precise Exponential Method of Steady Heat Conduction Equation for Functionally Graded Materials

LAN Linhua, FU Minghui, GAO Wenle

(Department of applied mechanics and engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** An efficient algorithm (Layered Precise Exponential Method, LPEM) of steady heat conduction equation is presented for Functionally Graded Materials (FGMs). Firstly the steady-state heat conduction equation is discretized equidistantly along the thickness direction with the discrete number  $M$  and then is changed into analytic Ordinary Differential Boundary Value Problem (ODBVP). Secondly algebraic equations which have almost no discretization error are established from the ODBVP by using of the precise integral relations of the state parameter between adjacent points, and then the recursion formula for elimination is given from upper algebraic equations. The results of Layered Precise Exponential Method have both good accuracy and good efficiency when the function of thermal conductivity is constant-type or exponential, and when the function of thermal conductivity is other forms of continuous and smooth function. The method also applies as long as the layered exponential approximation model is adopted. The numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and reliability of the proposed method.

**Key words:** Functionally Graded Materials (FGMs); steady heat conduction equation; Layered Precise Exponential Method (LPEM); two-point boundary value problems; the recursion formula for elimination

功能梯度材料 (Functionally Graded Materials, 简称 FGMs), 是一种材料性质和功能沿厚度方向呈连续变化的新型材料, 它通过连续改变两种材料的组成和结构, 使其内部界面消失, 从而达到增强

强度、缓和热应力等目的。这一概念和设想最早是由日本学者新野正之、平井敏雄<sup>[1]</sup>于 1984 年提出来的, 目前功能梯度材料的研究已经成为材料科学领域的前沿热点之一。

\* 收稿日期: 2010-07-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672194); 中俄 NSFC-RFBR 协议资助项目; 中山大学优秀研究生导师逸仙创新人才培养计划 SY2009 资助项目 (39000-3126200)

作者简介: 蓝林华 (1982 年生), 男, 博士; 通讯作者: 富明慧; E-mail: stsfmh@mail.sysu.edu.cn

在过去的 20 年里, 各国学者开展了大量的研究工作, Wang 等<sup>[2]</sup>用无网格方法对功能梯度材料进行了热力学分析, 该文利用模拟方程理论从原始的非均质系统得到等效的均质系统, 随后利用基本解方法和径向基函数分别构造了系统的近似部分和补充部分, 最后根据位移和边界条件求得满足控制方程的所有边界条件。陈建桥等<sup>[3]</sup>将无网格 Petrov-Galerkin 方法应用于功能梯度材料的三维热传导问题, 文中讨论了物性变化和材料组成对计算结果的影响。Ochiai<sup>[4]</sup>采用边界元方法讨论了含热源的稳态热传导问题, 同时用区域积分法改进了边界元方法并把它运用到功能梯度材料的热传导问题中。陈伟球等<sup>[5]</sup>用分层近似常数化的方法研究了功能梯度矩形厚板的三维热弹性分析, 文中将厚板分成厚度足够小的若干薄层, 并将每一层的材料参数近似为常数来进行求解分析, 这种近似模型虽然比较粗糙, 但形式简单, 便于应用, 有一定的适用性, 特别是分层近似模型取得合理时, 得到的结果精度会明显提高<sup>[6]</sup>。Chen 等<sup>[7]</sup>结合直接法和伴随矩阵法得到功能梯度材料稳态和瞬态热传导问题的灵敏度方程并进行了分析, 随后利用精细积分法求解了功能梯度材料的瞬态传热问题。精细积分法最初是应用于结构动力分析的方法<sup>[8]</sup>, 但由于具有精度高、稳定性好等优点, 因此迅速被推广到热传导问题<sup>[9-11]</sup>。

本文针对功能梯度材料的稳态热传导问题提出了分层精细指数法。该方法首先将空间分成离散方向和解析方向, 一般取厚度方向为解析方向, 另外一个(二维)或者两个(三维)方向为离散方向; 然后利用精细积分法计算传递矩阵并建立热传导方程边值问题的区段代数方程组; 最后针对边界条件导出合并消元的递推公式和回退求解公式。由于递推公式中直接利用了传递矩阵的结果, 因此递推合并消元过程具有很高的效率和精度, 当热传导系数为常数或指数形式时, 该方法得到的结果可以认为在解析方向是精确的; 当热传导系数为其他连续光滑函数时, 利用分层指数化模型, 该方法得到的结果可以认为沿解析方向是分层解析的, 因此也称本文方法为分层精细指数法 (Layered Precise Exponential Method, LPEM)。

## 1 常数型或指数型物性系数的稳态热传导问题

### 1.1 空间的离散及问题的转化

考虑三维矩形区域上的稳态热传导边值问题

$$\begin{cases} a(z) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + g(x, y, z) = 0 \\ (x, y, z) \in \Omega \quad \varphi(x, y, z) = \eta(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\varphi(x, y, z)$  是所要求的温度分布场,  $a(z)$  为热扩散系数,  $\Omega$  为区域内部  $\{0 < x < x_f; 0 < y < y_f; 0 < z < z_f\}$ ,  $\partial\Omega$  为区域边界,  $g(x, y, z)$  为空间热源场,  $\eta(x, y, z)$  为已知的边界温度场。

方程 (1) 的控制方程可以化为

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{g}{a} = 0 \quad (2)$$

其中  $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial z}$ , 对于常数型或指数型热扩散系数  $a(z) = \bar{a}e^{\lambda z}$ , 比值  $\frac{\dot{a}}{a}$  为一常数  $\lambda$ 。取厚度  $z$  方向为解析方向, 另外两个方向为离散方向, 网格步长为  $h_1 \times h_2$ , 离散网格数为  $(m+1) \times (n+1)$ , 如图 1 所示。

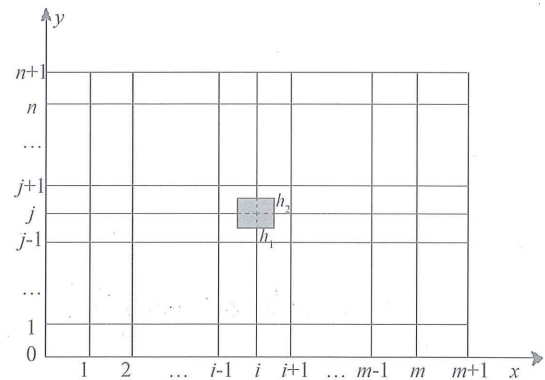


图 1 矩形域的网格划分

Fig. 1 Grid division of rectangular region

式 (2) 中的二阶导数采用中心差分, 离散得到  $mn$  阶的刚度矩阵记为  $K_{mn}$ , 同时记

$$\begin{aligned} q &= [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{mn}]^T = \\ &[\varphi_{11} \quad \varphi_{12} \quad \cdots \quad \varphi_{21} \quad \varphi_{22} \quad \cdots \quad \varphi_{mn}]^T \\ p &= [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{mn}]^T = \\ &\frac{\partial}{\partial z} [\varphi_{11} \quad \varphi_{12} \quad \cdots \quad \varphi_{21} \quad \varphi_{22} \quad \cdots \quad \varphi_{mn}]^T \end{aligned}$$

其中  $\varphi_{ij}$  为离散后的节点温度, 则式 (2) 可以化为

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{mn} \\ -K_{mn} & -\lambda \times I_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中  $r = r(z)$  是与热源场  $g(x, y, z)$  和边界温度场  $\varphi(x, y, z)$  有关的非齐次项,  $I_{mn}$  表示  $mn$  阶的单位矩阵。记  $H = \begin{pmatrix} 0 & I_{mn} \\ -K_{mn} & -\lambda \times I_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ ,  $f =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ 。方程 (1) 变为如下边值问题

$$\begin{cases} \dot{v} = H v + f \\ q(0) = \varphi|_{z=0}, q(z_f) = \varphi|_{z=z_f} \end{cases} \quad (4)$$

将区间  $[0, z_f]$  均匀划分为  $M$  份, 则步长为  $\Delta z = z_f/M$ 。记  $z_i = i\Delta z, q_i = q(z_i), p_i = p(z_i)$ , 则

$$v_{i+1} = T v_i + v_{i+1}^* \quad (i = 0, 1, \dots, M-1) \quad (5)$$

其中  $T = \exp(H\Delta z)$  是传递矩阵, 它可用文献 [8] 中的指数矩阵运算技巧精确求得,

$$v_{i+1}^* = \int_0^{\Delta z} \exp(H(\Delta z - z)) f(z + z_i) dz \text{ 为方程}$$

(4) 的特解, 可按文献 [12] 的方法给出, 也可用数值积分的方法计算。

式 (5) 可进一步写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} -T & I_{2mn} & & & & \\ & -T & I_{2mn} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -T & I_{2mn} & \\ & & & & -T & I_{2mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_{M-1}^* \\ v_M^* \end{pmatrix} \quad (6)$$

至此, 三维稳态热传导边值问题转化为式 (6) 形式的边值问题, 该问题中自由度  $(q_i, p_i), (i = 0, 1, \dots, M)$  的总个数为  $(2M + 2)$  个, 其中  $(q_0, q_M)$  为已知, 故未知量为  $2M$  个。又由于方程总数也为  $2M$  个, 所以原问题可求解。

### 1.2 递推合并消元

将  $T, I_{2mn}$  采用分块记法  $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, I_{2mn} = \begin{pmatrix} I_{mn} & 0 \\ 0 & I_{mn} \end{pmatrix}$ , 并引入新变量  $u_i = \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ q_i \end{pmatrix}, i = 1, 2,$

$\dots, M-1; u_M = \begin{pmatrix} p_{M-1} \\ p_M \end{pmatrix}$ , 代入边界条件, 方程

(6) 可化为

$$\begin{pmatrix} B_L & C & & & & \\ A & B & C & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & A & B & C \\ & & & & A & B_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{M-1} \\ y_M \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{mn} & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -T_{11} \\ 0 & -T_{21} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -T_{12} & I_{mn} \\ -T_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_L = B, B_R = \begin{pmatrix} -T_{12} & 0 \\ -T_{22} & I_{mn} \end{pmatrix}, y_1 = v_1^* + \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} q_0$$

$$y_M = v_M^* - \begin{pmatrix} I_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} q_M, \quad y_i = v_i^*, \quad i=2, 3, \dots, M-1 \quad (8)$$

通常情况下, 此类块三对角方程可考虑用块追赶法进行求解<sup>[13]</sup>。块追赶法可由左向右追赶, 也可由右向左追赶, 或者由两端向中央追赶。当  $B_L^{-1}$  不存在时, 只能采用由右向左追赶的方法, 当  $B_L^{-1}$  和  $B_R^{-1}$  均不存在时, 将不能用块追赶法进行求解。

下面研究方程 (8) 的一种高效消元法——递推合并消元。

为了让消元过程能够以一定形式递推下去, 取  $M = 2^z + 1$ , 利用第 2 条方程消去第 1 条方程的第 2 项, 用第  $M-1$  条方程消去第  $M$  条方程的第 1 项, 用第  $2i, 2i+2 (i = 1, 2, \dots, (z-3)/2)$  条方程消去第  $2i+1$  条方程的第 1, 3 项, 得

$$\begin{pmatrix} B_L^{(1)} & C^{(1)} & & & & \\ A^{(1)} & B^{(1)} & C^{(1)} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & A^{(1)} & B^{(1)} & C^{(1)} & \\ & & & A^{(1)} & B^{(1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_{(M-1)/2}^{(1)} \\ u_{(M+1)/2}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_{(M-1)/2}^{(1)} \\ y_{(M+1)/2}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} B_L^{(1)} &= B_L - CB^{-1}A, B_R^{(1)} = B_R - AB^{-1}C, \\ B^{(1)} &= B - AB^{-1}C - CB^{-1}A, \\ C^{(1)} &= -CB^{-1}C, A^{(1)} = -AB^{-1}A, \\ u_i^{(1)} &= u_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, (M+1)/2), \\ y_1^{(1)} &= y_1 - CB^{-1}y_2, y_i^{(1)} = y_{2i-1} - \\ &AB^{-1}y_{2i-2} - CB^{-1}y_{2i} \quad (i = 2, 3, \dots, (M-1)/2), \\ y_{(M+1)/2}^{(1)} &= y_M - AB^{-1}y_{M-1} \end{aligned} \quad (10)$$

这样经过一次消元, 方程的数目将变为  $M^{(1)} = (M+1)/2 = 2^{z-1} + 1$  条, 因此类似的过程可以递推下去, 经过  $z$  次递推消元后, 方程变成 2 条

$$\begin{pmatrix} B_L^{(z)} & C^{(z)} \\ A^{(z)} & B_R^{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(z)} \\ u_2^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(z)} \\ y_2^{(z)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

上式可方便地求得

$$u_1^{(z)} = (B_L^{(z)} - C^{(z)}(B_R^{(z)})^{-1}A^{(z)})^{-1}(y_1^{(z)} -$$

$$u_2^{(z)} = (B_R^{(z)} - A^{(z)}(B_L^{(z)})^{-1}C^{(z)})^{-1}(y_2^{(z)} - A^{(z)}(B_L^{(z)})^{-1}y_1^{(z)}) \quad (12)$$

注意到  $u_1^{(z)}, u_2^{(z)}$  即为  $u_1, u_M$ , 按照消元的逆过程回代便可求出问题的全部解答。

如果采用块追赶法对方程 (7) 进行求解, 所需矩阵求逆的次数为  $2^z + 1$ , 矩阵乘法次数为  $2^{z+1} - 1$ 。而按式 (9) - (12), 矩阵求逆次数仅为  $z + 1$ , 矩阵乘法次数为  $6z + 2$ 。由此可见当  $z$  较大时, 本文递推方法较块追赶法能大幅度提高计算效率, 特别是当  $B_L^{-1}$  和  $B_R^{-1}$  均不存在时, 此时块追赶法已经失效, 但经过  $z$  次迭代后,  $B_L^{(z)}$  和  $B_R^{(z)}$  的性态也会变好, 从而让方程 (11) 可求解。

### 2 其他形式物性系数的稳态热传导问题

上一节讨论了常数型和指数型物性系数的稳态热传导问题, 对于其他形式物性系数的稳态热传导问题, 此时式 (4) 中的系数矩阵  $H$  将不再是常数矩阵, 它将是关于坐标  $z$  的变系数矩阵  $H(z) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{mn} \\ -K_{mn} & -\frac{a}{a} \end{pmatrix}, \text{ 这样, 原来的式 (4) 将变成}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = H(z)v + f \\ q(0) = \varphi|_{z=0}, q(z_f) = \varphi|_{z=z_f} \end{cases} \quad (13)$$

此时, 只要把物性系数沿解析 (厚度) 方向分层指数化 (即用指数型函数  $a_i(z) = \bar{a}_i e^{\lambda_i z}$  对物性系数进行分层拟合) 后, 上一节的求解方法同样适用。此时的方程 (5) 变为

$$v_{i+1} = T_{i+1}v_i + v_{i+1}^* \quad (i = 0, 1, \dots, M-1) \quad (14)$$

其中  $T_{i+1} = \exp(H_{i+1}\tau)$ ,

$$H_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{mn} \\ -K_{mn} & -\lambda_{i+1} \times I_{mn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

式 (6) 也相应变为

$$\begin{pmatrix} -T_1 & I_{2mn} & & & & \\ & -T_2 & I_{2mn} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -T_{M-1} & I_{2mn} & \\ & & & & -T_M & I_{2mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_{M-1}^* \\ v_M^* \end{pmatrix} \quad (16)$$

参照上一节的做法, 式 (13) 可以化成一般的块三角系统

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = y_i, i = 1, 2, \dots, M \quad (17)$$

其中

$$A_1 = 0, A_i = \begin{pmatrix} 0 & -T_{i11} \\ 0 & -T_{i21} \end{pmatrix}, i = 2, 3, \dots, M$$

$$C_M = 0, C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{mn} & 0 \end{pmatrix}, i = 2, 3, \dots, M$$

$$B_M = \begin{pmatrix} -T_{M12} & 0 \\ -T_{M22} & I_{mn} \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} -T_{i12} \\ -T_{i22} \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1$$

$$y_1 = v_1^* + \begin{pmatrix} T_{111} \\ T_{121} \end{pmatrix} q_0, y_M = v_M^* - \begin{pmatrix} I_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} q_M$$

$$y_i = v_i^*, i = 2, 3, \dots, M-1 \quad (18)$$

式 (17) 同样可以用上一节的递推合并消元法进行合并消元求解, 本文不再详细叙述。

### 3 算 例

例 1 二维矩形域的稳态热传导问题 (如图 2), 求解区域  $l_x = 5\text{m}; l_y = 2\text{m}$ , 边值温度为  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \phi_3 = \sin\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)$ 。取  $x$  方向为离散方向,  $y$  方向为解析方向。

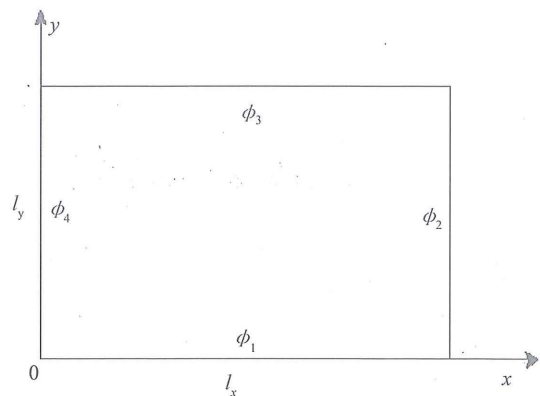


图 2 矩形域稳态热传导示意图

Fig. 2 Stated heat conduction in rectangular region

当热扩散系数为常数即  $a(y) = \bar{a}_0$  时, 用分离变量法可以得到该问题的解析解答 (Analytical Solution, AS)

$$\phi(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \quad (19)$$

则  $y$  方向的温度梯度  $\phi_y$  为

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\pi}{l_y} \sin\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \quad (20)$$

图 3 给出了温度场等值线分布比较图, 其中实线为解析解答 (AS), 虚线为本文方法结果 (LPEM), 空间离散时采用  $50 \times 129$  的均匀网格; 图 4 给出了

$y = 0$  和  $y = 2$  的温度梯度  $\phi_y$  分布图，其中实线和虚线为解析解答 (AS)，实心点与空心点表示本文方法结果 (LPEM)，从结果可以看出，本文的计算结果与解析解答十分吻合。

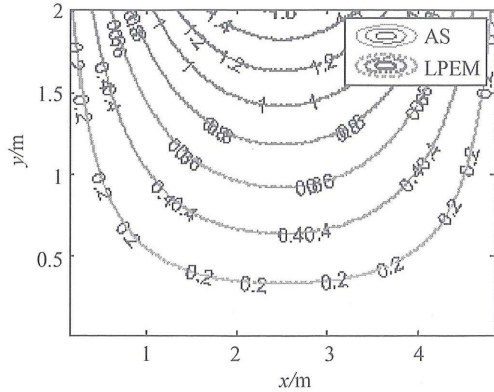


图 3 温度场等值线分布图  
Fig. 3 Temperature field isograms

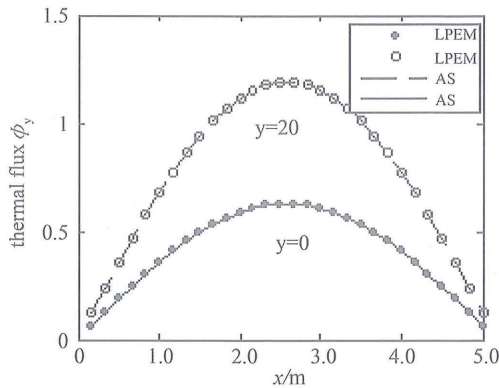


图 4  $y$  方向温度梯度分布图  
Fig. 4 Temperature gradient distribution along  $y$  axis

对于指数型功能梯度材料，其热扩散系数取如下形式

$$a(y) = \bar{a}_0 \times \exp(\kappa y) \quad (21)$$

其中  $\kappa$  为梯度参数或者梯度指标。本文针对不同的梯度指标和不同的网格划分分别用本文方法 (LPEM) 和常规的有限元法 (FEM) 进行了求解，求解区域和边界条件均与上例相同。

表 1 给出了两种方法在  $\bar{a}_0 = 0.5, \kappa = 0.2$  时的 CPU 计算时间比较，空间离散分别采用  $40 \times 33$ 、 $40 \times 65$ 、 $40 \times 129$ 、 $40 \times 257$  的均匀网格，两种方法均在一台电脑 (Intel Core2 6300+) 进行运算。从表中可以看出对于指数型功能梯度材料，本文方法有良好的计算效率；表中的虚横线表示内存溢出，导致无法计算，从表中可看出本文方法可以计算更大规模的网格。图 5 给出了  $x = 2.5$  m 位置上

的温度沿  $y$  轴的变化曲线，空间离散采用  $40 \times 33$  的均匀网格，考虑了  $\kappa$  的 5 种不同取值。从图中可以看到，梯度参数  $\kappa$  越大，内部点的温度越高。

表 1 CPU 计算时间比较

| Table 1 The comparison of CPU computation time |            |         |          |          |
|--|------------|---------|----------|----------|
| Grid   | 40 × 33    | 40 × 65 | 40 × 129 | 40 × 257 |
| Method   | CPU time/s |         |          |          |
| LPEM   | 0.156      | 0.172   | 0.187    | 0.219    |
| FEM  | 1.703      | 9.516   | —        | —        |

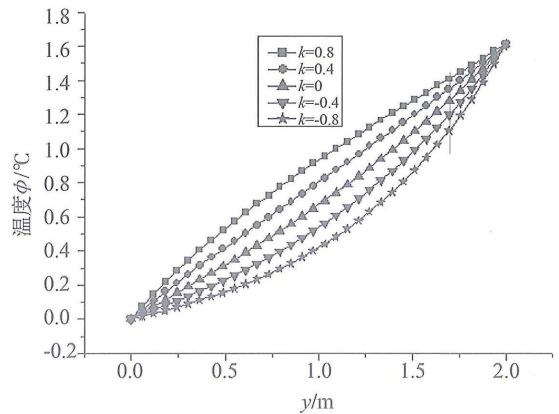


图 5 功能梯度材料中心轴 ( $x = 2.5$  m) 温度变化曲线  
Fig. 5 Temperature curve at central axis ( $x = 2.5$  m) for different FGMs

例 2 任意物性系数功能梯度材料的稳态热传导问题。求解区域和边界条件与例 1 相同，热扩散系数取如下幂函数形式 (也可以为其他任意形式)

$$a(y) = \bar{a}_1 \left( \frac{l_y - y}{l_y} \right)^k + \bar{a}_2 \left( 1 - \left( \frac{l_y - y}{l_y} \right)^k \right) \quad (22)$$

其中  $\bar{a}_1$  和  $\bar{a}_2$  代表两种均匀材料的热扩散系数， $k$  为梯度指标，如果  $k = 0$ ，则表示均匀材料，本文取  $x$  方向为离散方向， $y$  方向为解析方向。用指数函数  $a_i(y) = a_i \exp(\kappa_i y)$  对式 (22) 进行分层拟合，图 6 给出了热扩散系数 ( $\bar{a}_1 = 0.1, \bar{a}_2 = 0.8, k = 0.8$ ) 拟合前、后的变化曲线图。从图中可以看出，即使解析方向划分层数很少 (只有 5 层)，拟合后的曲线已经跟拟合前比较接近，而且解析方向划分层数增多的话拟合的效果会更好。

图 7 给出了两种不同材料在同一视角下区域的温度场分布图， $x$  方向离散网格均为 40，解析方向网格数均为 33。其中图 7 (a) 材料的梯度指标  $k = 0.8$ ，图 7 (b) 材料的梯度指标为  $k = 0$ ，表示均匀材料，其他条件与上面相同，从图中可以看出，温度分布除了在边界上一样外，材料 a 的域内温度要略高于材料 b 的温度。

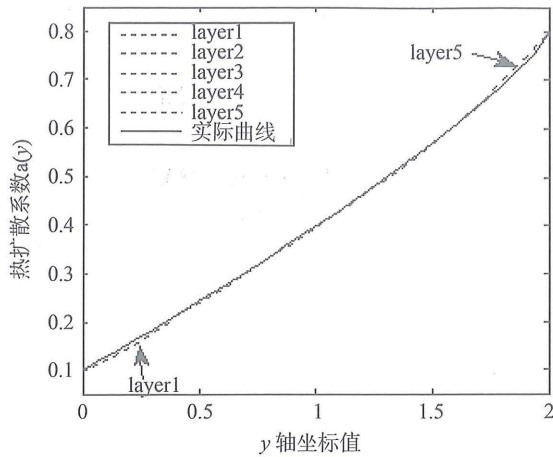


图6 热扩散系数拟合效果图

Fig. 6 The fitting map of thermal diffusivity

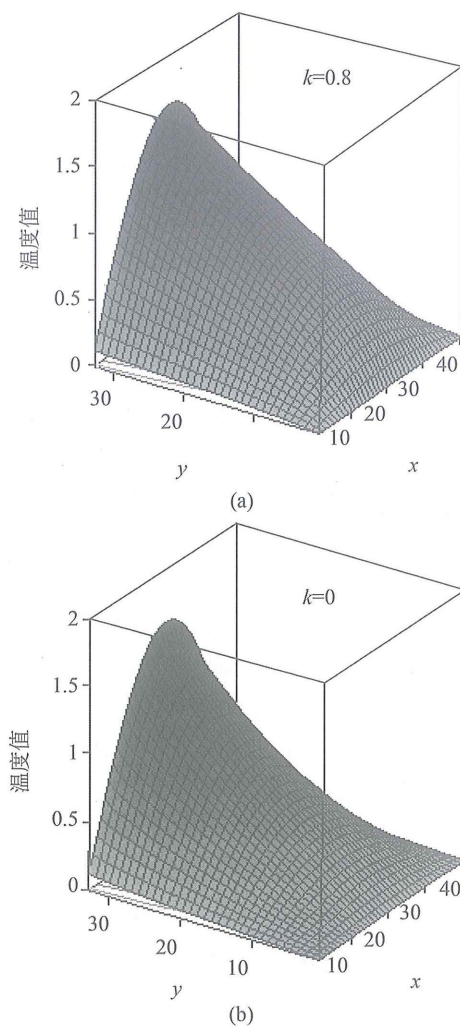


图7 不同材料的温度场分布图

Fig. 7 Temperature distribution for different materials

## 4 结 论

针对功能梯度材料的稳态热传导问题,本文提出了一种有效的求解方法——分层精细指数法(Layered Precise Exponential Method, LPEM)。当热传导系数为常数或者指数型函数时,热传导系数的稳态传热方程,本文的方法效率与精度兼而有之,当热传导系数为其他连续光滑函数时,采用分层指数近似模型,该方法同样适用,本文的算例证明了本文方法有效性与适用性。

### 参考文献:

- [1] 新野正之,平井敏雄,渡边龙山. 倾斜机能材料-宇宙机用超耐热材料を目指す[J]. 日本复合材料学会志, 1987, 13(6): 257-264.
- [2] WANG H, QIN Q H. Meshless approach for thermo-mechanical analysis of functionally graded materials [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32: 704-712.
- [3] 陈建桥,丁亮. 功能梯度材料瞬态热传导问题的MLPG方法[J]. 华中科技大学学报:自然科学版, 2007, 35(4): 119-121.
- [4] OCHIAI Y. Two-dimensional steady heat conduction in functionally gradient materials by triple-reciprocity boundary element method [J]. *Eng Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(12): 1445-1453.
- [5] 陈伟球,边祖光,丁皓江. 功能梯度矩形厚板的三维热弹性分析[J]. 力学季刊, 2002, 23(4): 443-449.
- [6] 田云德,秦世伦. 功能梯度热应力分层计算方法的改进[J]. 计算力学学报, 2009, 26(6): 961-965.
- [7] CHEN B S, TONG L Y. Sensitivity analysis of heat conduction for functionally graded materials [J]. *Materials and Design*, 2004, 25: 663-672.
- [8] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-135.
- [9] 钟万勰. 一类非线性热传导方程的单元精细积分[J]. 自然科学进展, 1996, 6(3): 313-316.
- [10] 顾元宪,陈飏松,张洪武,等. 非线性瞬态热传导的精细积分方法[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40(S1): 24-28.
- [11] 蓝林华,富明慧,程正阳. 功能梯度材料瞬态热传导问题的降维精细积分法[J]. 固体力学学报, 2010, 31(4): 406-410.
- [12] 富明慧,刘祚秋,林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 672-677.
- [13] 宫野,龙永兴,王友年,等. 快三对角矩阵方程的追赶法及其应用[J]. 大连理工大学学报, 1997, 37(4): 406-409.
- [14] OZISIK M N. 热传导[M]. 俞昌铭,译. 北京:高等教育出版社, 1983.